Revista Interamericana de Psicología/Interamerican Journal of Psychology - 2007, Vol. 41, Num. 3 pp. 371-378



# Razonamiento Proporcional Intuitivo en Alumnos de Primaria y Secundaria

Juan José Díaz Díaz de León[1]
Marco Antonio Soto Mayorga
Adriana Martínez Sánchez
*Universidad Autónoma de Zacatecas, México*

**Compendio**

La comprensión de las relaciones de proporción se analiza de acuerdo con el rendimiento y las estrategias. La muestra se formó con 24 alumnos de quinto de primaria y 24 escolares de segundo de secundaria. La tarea consistió en resolver problemas numéricos e intuitivos de proporciones. Los resultados indican que los alumnos desarrollan más el razonamiento proporcional en los problemas intuitivos. Las estrategias lógicas se usan más en los problemas intuitivos por ambos grupos, mientras que las estrategias intuitivas se manifiestan más en los problemas numéricos en quinto grado y en los problemas intuitivos en segundo de secundaria. Existe una interacción entre el conocimiento formal e intuitivo respecto a las proporciones.
*Palabras clave:* estrategias; intuición; proporción; razonamiento.

**Elementary and Secondary Childrens´Proportional Intuitive Reasoning**

**Abstract**

The purpose of this study was to examine understand of proportional relations according to improvement and strategies. Task problem-solving numerics and intuitive proportions were administered to 48 childrens in 5th grade and 8th grade. Results revealed that students developed more proportional reasoning in intuitive problems. Logic strategies were used more in intuitive problems by both groups. Intutive strategies were used more by 5th grade in numeric problems and by 8th in intuitive problems. There were interaction between intuitive and formal knowledge on proportions.
*Keywords:* intuition; proportions; reasoning; strategies.

La noción de la existencia y desarrollo del conocimiento matemático intuitivo, su interacción con el desarrollo de estructuras matemáticas formales, y la facilitación de ese desarrollo es de considerable interés en la investigación sobre la adquisición del conocimiento matemático. Resnick (1986) presenta un análisis del conocimiento intuitivo que los niños tienen antes de entrar a la escuela, así como aquel que los alumnos exhiben en formas más desarrolladas en las tareas iniciales de la escuela. En este nivel escolar, el conocimiento intuitivo se caracteriza por la capacidad de los niños para relacionar su conocimiento de la propiedad de composición aditiva de los números que tiene lugar en el sistema de numeración. Las funciones del sistema del símbolo como parte de la comprensión intuitiva del niño en las matemáticas incluyen las proporciones, los cocientes y otras relaciones multiplicativas que se desarrollan cuando las notaciones formales se establecen dentro del sistema matemático intuitivo del alumno. Una implicación importante de esto son las situaciones educativas que ayudan a los niños a desarrollar su conocimiento matemático intuitivo (Mack, 1990).

Resnick (1986) ofrece dos características del conocimiento intuitivo. Primero, el conocimiento intuitivo es evidente y obvio a la persona que lo tiene, pero no requiere la justificación en términos de premisas anteriores. En segundo lugar, el conocimiento intuitivo es fácilmente accesible y esta vinculado a la memoria en una variedad de situaciones específicas. Esto proporciona la base para el uso flexible de conceptos, notaciones y reglas de transformación. Las consecuencias del pensamiento es que los alumnos tienen menos confianza en los algoritmos y se inventan estrategias de solución para problemas no encontrados previamente. Con esto se puede ir más allá de la instrucción tradicional mediante la construcción del conocimiento matemático.

El conocimiento intuitivo sobre las proporciones se ha estudiado con el diseño de situaciones de mezcla o combinación de elementos cotidianos. Noelting (1980) diseñó un experimento sobre la mezcla del jugo de naranja conformado por 23 items con distintos grados de complejidad sobre el concepto de razón. Los participantes fueron niños de 6 a 16 años. Las etapas de desarrollo conceptual se han descrito en términos de la Escala del Desarrollo de Ginebra. Los resultados indican que los procesos cognitivos para pasar de una etapa a otra son el proceso de "reestructuración adaptativa" que participa en dos períodos del desarrollo: construcción del concepto de razón y construcción del algoritmo del común denominador.

El rol del razonamiento cualitativo se ha analizado por Chi y Glaser (1982), quienes encontraron que los alumnos expertos razonan de manera cualitativa sobre los componentes del problema y las relaciones entre ellos antes de describir estos componentes y relaciones en términos cuantitativos. El consenso es que el razonamiento de los expertos sobre un

[1] Montes de Oca 16. Fraccionamiento El Paraíso, 98613 - Guadalupe, Zacatecas, México. *E-mail:* jjdddl@mixmail.com

problema conduce a una representación superior del problema que permite al experto saber cuándo el razonamiento cualitativo es inadecuado y el razonamiento cuantitativo es necesario. Esto no quiere decir que los expertos utilizan el razonamiento cualitativo y los principiantes no lo emplean. Por el contrario, el razonamiento cualitativo de los expertos se basa en principios científicos e implica la formación de relaciones entre los componentes del problema basados en estos principios. Los novatos, por otra parte, razonan sobre la estructura superficial del problema. Entonces, el razonamiento cualitativo que refieren Chi y Glaser no está lejos del razonamiento intuitivo señalado por Kieren (1988). Por tanto se entiende que existe un conocimiento intuitivo sobre el orden y equivalencia en el razonamiento proporcional. Por otra parte, Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) argumentan que las concepciones de los alumnos y su rendimiento en los problemas verbales de multiplicación y división son derivadas de modelos intuitivos primitivos que corresponden a las características de la conducta mental humana que son naturalmente primarias y básicas. Explican que la multiplicación implica un modelo de hacer más grande, mientras que la división implica hacer más pequeño. Sin embargo, estas concepciones son acordes con las operaciones de multiplicación y división, pero no en el dominio del pensamiento proporcional.

Nesher y Sukenik (1991) estudiaron la representación formal de la mezcla del color azul con el amarillo, así como los números racionales y su efecto en la habilidad de los alumnos para solucionar problemas de razón mediante la comparación de tales mezclas. Los alumnos de primero a tercero de secundaria recibieron problemas de comparación de mezclas con una oportunidad para conocer sus resultados y verificar sus predicciones (tarea 1). Después, los alumnos contestaron problemas similares una vez que se les presentó la representación de las mezclas como números racionales (tarea 2). Finalmente, se les aplicó un test para medir su habilidad en buscar una solución general a los problemas de la misma naturaleza (tarea 3). El análisis de estrategias mostró que la mayoría de los alumnos mejoró su rendimiento con la presentación formal de los problemas.

Asimismo, Harel, Behr, Post y Lesh (1992) presentaron una tarea de cubos para investigar el razonamiento cualitativo de los niños en un contexto de proporción. Los factores relevantes son: el tipo de representación del problema que los niños formaron en respuesta a la presentación del problema, las estrategias de solución que se emplearon, y la relación entre la representación del problema y la estrategia de solución. Los resultados permitieron identificar una jerarquía de tres representaciones del problema y tres categorías de estrategias de solución con dos estrategias en la categoría superior, tres en la categoría media y una en la categoría baja. Las representaciones del problema de los niños y las estrategias de solución sugirieron el conocimiento implícito o intuitivo de los principios del razonamiento cualitativo para las situaciones de proporción y números racionales. Estos principios fueron deducidos de los protocolos de solución de problemas de los niños. Tales principios se pueden considerar como principios del razonamiento cualitativo para las situaciones de proporción.

Además, Fujimura (2001) realizó un estudio en el que participaron 140 alumnos de cuarto grado para solucionar problemas de proporción acerca de situaciones de mezcla de jugo antes de la intervención donde se usó un modelo con materiales concretos. Este modelo fue más efectivo para los alumnos que hicieron una representación apropiada comparando de manera correcta las concentraciones de jugo en relación con los alumnos que no realizaron tal representación. Las conclusiones afirman que es necesario facilitar el razonamiento proporcional dependiendo de los procesos de razonamiento (representación o comparación). La intervención sobre estos procesos se construye a partir del conocimiento intuitivo.

Singh (2000) planteó el propósito de analizar la construcción y comprensión de los esquemas de razonamiento proporcional. Los datos de las entrevistas clínicas muestran la importancia del pensamiento multiplicativo en el razonamiento proporcional. Las operaciones mentales unidad y reiteración juegan un rol importante en el uso del pensamiento multiplicativo en tareas de proporción. La unidad implica una unidad compuesta. La reiteración es un planteamiento que preserva la invarianza de una razón. Los resultados indican que los procesos de reiteración necesitan conceptuar explícitamente la acción reiterativa de la unidad de razón compuesta para tener sentido de los problemas de razón y una suficiente comprensión del significado de la multiplicación y división y su relevancia en los procesos reiterativos. Entonces se necesita construir una estructura multiplicativa y esquemas de reiteración para poder realizar un razonamiento proporcional.

En cuanto a la presentación de problemas verbales, Lamon (1989) identificó 16 tipos de problemas de proporciones combinando cuatro dimensiones del problema con cuatro categorías semánticas. Las dimensiones del problema eran cambio relativo/absoluto, reconocimiento de mapeo que conserva el cociente, covarianza/invarianza, y construcción de mapeo que conserva el cociente. Las categorías semánticas eran medidas completas/parciales, series parte-parte-enteros, series sin relación, y tramo/estrecho. Las relaciones multiplicativas se presentan sobre una evaluación del tamaño de un cambio considerando su relación a los valores iniciales y no simplemente en términos de su cantidad absoluta. Los resultados indican que el rendimiento de los alumnos de sexto de primaria en el cambio de relativo/absoluto a través de las categorías semánticas (en el orden mencionado arriba) era 6.8%, 57.4%, 83.3%, y 18.9%. El funcionamiento de los alumnos del sexto grado en la dimensión del problema de covarianza/invarianza a través de los cuatro tipos semánticos era 72.3%, 79.5%, 60.5%, y 50.0%.

También, Harel y Behr (1989) plantean un análisis teórico de una estructura del problema para los problemas de la proporción con valor desconocido. Se propone un modelo de solución de problemas que incorpora tres componentes: presentación del problema, representación del problema y operadores, y estrategias de solución. El análisis del primer componente tuvo en cuenta 512 estructuras del problema con respecto a tres variables estructurales: orden de la incógnita (localización), unidad de medida (espacio, medición y partición) y divisibilidad (dirección y común denominador). El análisis del segundo componente integró tres clases de representaciones (comprensión, intermedia, y procesal). La comprensión se usa para entender el problema. La representación intermedia se emplea para explorar las relaciones entre los componentes del problema. El procedimiento implica aplicar una estrategia de solución. Además se integran tres clases de operadores: transformaciones (los alumnos utilizan la transformación de una estructura del problema a otra estructura de problema sin cambiar las cantidades), rango de unidad (operadores que cambian las cantidades del problema, pero la estructura del problema no se modifica) y procedimiento (inicio en la representación de un proceso con una serie de estrategias). El segundo componente considera el desarrollo intuitivo de los niños, el conocimiento sobre el número racional y las situaciones de proporción. Este conocimiento intuitivo se desarrolla por los niños en las situaciones educativas apropiadas construidas para ejemplificar los principios del razonamiento para los números racionales y las situaciones de proporción. Harel et al. (1992) analizaron extensamente las representaciones del problema y el uso de las estrategias de solución de alumnos de primero de secundaria durante la resolución de situaciones de proporción en la tarea de cubos. Esta tarea se diseñó para un razonamiento cualitativo antes que un razonamiento cuantitativo (Chi, Feltovich, & Glaser, 1981). El análisis del tercer componente consideró 15 estrategias de solución con una jerarquía en la preferencia de expresión.

Van Dooren, de Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel (2005) plantean que los alumnos de primaria y secundaria emplean métodos incorrectos en el razonamiento proporcional. Esta idea se centra en el desarrollo de la aplicación incorrecta del razonamiento proporcional según la edad y la experiencia educativa de los alumnos. La tarea consistió en una prueba de papel y lápiz con distintos problemas aritméticos proporcionales. Los alumnos tienden a aplicar métodos proporcionales en problemas que no son proporcionales. Esto ocurrió principalmente entre los alumnos de segundo grado, aunque tendió a disminuir en quinto grado al mismo tiempo que la capacidad de razonamiento proporcional se incrementó entre los alumnos. Los alumnos de sexto distinguen cuando el razonamiento proporcional se aplica y cuando no se requiere. Sin embargo, los escolares de segundo de secundaria todavía manifestaban los errores mencionados.

El propósito de la actual investigación es estudiar los patrones del razonamiento proporcional numérico e intuitivo en escolares de primaria y secundaria. En primer lugar se tiene el objetivo de analizar el patrón evolutivo del concepto de proporción en alumnos de primaria y secundaria. En segundo lugar se estudian las estrategias intuitivas y numéricas en los problemas de proporciones. En otras palabras la investigación tiene el propósito de analizar el rendimiento, las estrategias utilizadas y los errores de los escolares de primaria y secundaria con respecto al razonamiento proporcional numérico e intuitivo.

## Método

### Participantes

Un total de 48 niños han participado en la investigación siendo 24 alumnos de quinto de primaria y 24 alumnos de segundo de secundaria de escuelas públicas en la ciudad de Zacatecas, México. Todos los alumnos se seleccionaron al azar. Los niños de primaria tienen un rango de edad entre 10 y 11 años. Los participantes de secundaria contaban con edades comprendidas entre 13 y 15 años. En esta muestra participaban 12 niñas y 12 niños en quinto de primaria y 15 niñas y 9 niños en segundo de secundaria. Además se contó con el permiso de los profesores para realizar esta investigación con los alumnos.

### Material

El material empleado son 8 problemas de proporciones: 4 problemas intuitivos y 4 problemas numéricos. Los problemas intuitivos se diseñaron de la siguiente manera: 1) problema mezcla de café se presentó usando un vaso, agua, azúcar, cuchara y café; 2) problema mezcla de naranjada se integró con un vaso, agua, azúcar, cuchara y polvo de naranjada; 3) problema mezcla de masa se formó con un vaso, agua, cuchara y harina; y, 4) problema mezcla de jabón se realizó con un vaso, agua, cuchara y jabón. Los problemas numéricos fueron presentados en tarjetas de cartulina con medidas de 8cm. de largo por 5.5cm. de ancho según las siguientes ecuaciones: a) 1: 1; b) 2:2; c) 1:3; y, d) 2:1.

### Procedimiento

Los problemas numéricos e intuitivos se presentaron a los participantes en una sola sesión. En primer lugar se presentaba el problema intuitivo 1 frente al niño con el material azúcar, cuchara, café y agua y se daban las siguientes indicaciones: "Aquí tenemos azúcar, acá hay agua, esta es una cuchara y esto es café. Ahora te pregunto ¿cuántas cucharadas crees que necesitas de café y azúcar para prepararte un café en este vaso con agua?". Si el niño no entendía el problema, o pedía repetición del problema, entonces el problema se presentaba otra vez. Después que el alumno daba su respuesta, el experimentador decía: "estoy interesado en saber cómo los niños de tu edad contestan a este problema, dime ¿Tú cómo lo has hecho?". A continuación el niño daba su explicación. En segundo lugar se exponía el problema numérico 1 al niño con las siguientes indicaciones: "Este es el número 1, esto es el signo de proporción o equivalencia, y aquí hay otro número 1.

Ahora te hago esta pregunta ¿que entiendes por uno en proporción a uno?". En caso de que el niño no comprendiera la pregunta se le presentaba de nuevo. Una vez que el alumno daba su respuesta, el investigador decía. "me gustaría saber, ¿cómo le has hecho para saber la respuesta?". Cuando el alumno daba su explicación se pasaba al siguiente problema. En tercer lugar se presentaba el problema intuitivo 2. En cuarto se trataba el problema numérico 2. En quinto se exponía el problema intuitivo 3. En sexto se preguntaba sobre el problema numérico 3. En séptimo se investigaba el problema intuitivo 4. El último lugar correspondía al problema numérico 4. Cada sesión individual se grabó en vídeo. La aplicación a los niños de primaria ocurrió en el centro de cómputo, mientras que con los alumnos de secundaria se usó la sala audiovisual.

### Calificación

Las respuestas se identificaron como acierto o error en términos del rendimiento. El tipo de estrategia se clasificó en tres modalidades: lógicas, intuitivas y numéricas.

## Resultados

El análisis de datos se presenta de acuerdo con el rendimiento, las estrategias lógicas, las estrategias intuitivas, las estrategias numéricas y el análisis cualitativo.

### Análisis del rendimiento

Con los datos de los alumnos de primaria y secundaria realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Curso escolar: quinto primaria vs. segundo secundaria) X 2 (Problema: numérico vs. intuitivo) con medidas repetidas en el último factor mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar se define como la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema es el factor intra-sujetos. El rendimiento se considera como la variable dependiente.

Los efectos principales sólo se encontraron en el factor problema $F(1,46)=9.68$, $p < .01$. No hubo efectos del factor curso $F(1,46)=0.09$, $p=0.75$. Es decir, el tipo de problema afecta el rendimiento en los problemas proporcionales.

El análisis de comparaciones por pares se realizó entre los distintos problemas con una prueba de medias la cual indica que las diferencias son significativas en el rendimiento de los problemas intuitivos con respecto a los problemas numéricos ($p<.01$). Es decir, los alumnos de ambos cursos desarrollan más el razonamiento proporcional en problemas intuitivos que en problemas numéricos. El análisis de varianza no revela alguna interacción significativa.

### Análisis de las estrategias lógicas

Con los datos de las estrategias lógicas en la solución de problemas proporcionales realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Curso escolar: quinto primaria vs. segundo secundaria) X 2 (Problema: numérico vs. intuitivo) con medidas repetidas en el último factor mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar se define como la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema es el factor intra-sujetos. El uso de estrategias lógicas en los problemas de proporciones se considera como la variable dependiente.

Los efectos principales sólo se encontraron en el factor problema $F(1,46)=4.24$, $p< .05$. No hubo efectos del factor curso $F(1,46)=0.10$, $p=0.74$. Es decir, el tipo de problema afecta el uso de estrategias lógicas en los problemas de proporciones.

El análisis de comparaciones por pares se realizó entre los distintos problemas con una prueba de medias la cual indica que las diferencias son significativas en el uso preferente de estrategias lógicas en los problemas intuitivos con respecto a los problemas numéricos ($p<.05$). Es decir, los alumnos de ambos cursos utilizan las estrategias lógicas más en problemas intuitivos que en problemas numéricos. El análisis de varianza no revela alguna interacción significativa.

### Análisis de las estrategias intuitivas

Con los datos de las estrategias intuitivas en la solución de problemas proporcionales realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Curso escolar: quinto primaria vs. segundo secundaria) X2 (Problema: numérico vs. intuitivo) con medidas repetidas en el último factor mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar se define como la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema es el factor intra-sujetos. El uso de estrategias intuitivas en los problemas de proporciones se considera como la variable dependiente.

No hubo efectos de los factores curso $F(1,46)=0.00$, $p=1.0$ y problema $F(1,46)=0.89$, $p=0.35$. Es decir, el curso escolar y el tipo de problema no afectan el uso de estrategias intuitivas en los problemas de proporciones. El análisis de varianza revela que es significativa la interacción doble Problema X Curso $F(1,46)=4.18$, $p<.05$.

En la Figura 1 se muestra la interacción problema por curso en el empleo de estrategias intuitivas al resolver problemas de proporciones que corresponde a los alumnos.

Tal como se aprecia, los alumnos de quinto curso de Educación Primaria manifiestan las estrategias intuitivas más en los problemas numéricos que en los problemas intuitivos. Mientras que los alumnos de segundo curso de Educación Secundaria utilizan mayormente las estrategias intuitivas en los problemas intuitivos en comparación con los problemas numéricos. Las estrategias intuitivas tienden a aumentar en los problemas intuitivos, mientras que estas estrategias muestran una disminución ante los problemas numéricos.

### Análisis de las estrategias numéricas

Con los datos de las estrategias numéricas en la solución de problemas proporcionales realizamos un análisis de varianza (ANOVA) mixto 2 (Curso escolar: quinto primaria vs. segundo secundaria) X2 (Problema: numérico vs. intuitivo) con medidas repetidas en el último factor mediante el programa SPSS 11.0. El curso escolar se define como la variable inter-sujetos, mientras que el tipo de problema es el factor intra-sujetos. El uso de

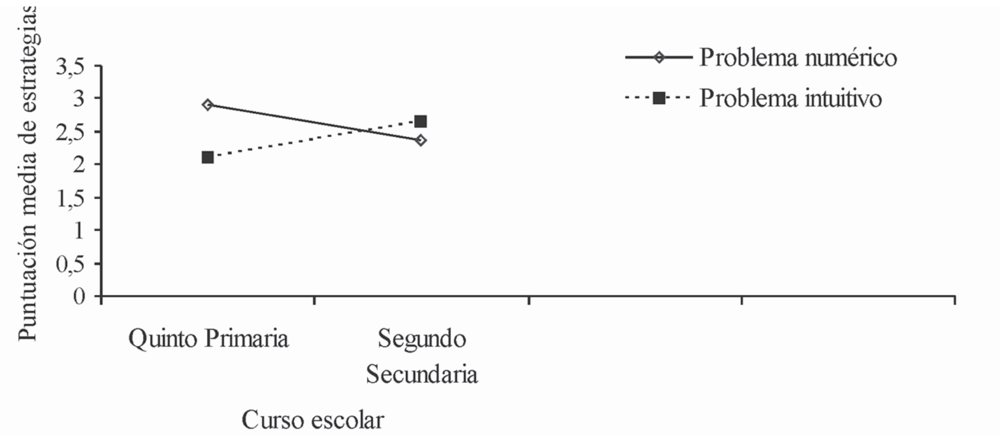


*Figura 1.* Interacción significativa curso por tipo de problema en el empleo de estrategias intutivas durante la solución de problemas de proporciones.

estrategias numéricas en los problemas de proporciones se considera como la variable dependiente.

No hubo efectos de los factores curso $F(1,46)=0.00$, $p=1.0$ y problema $F(1,46)=2.42$, $p=0.12$. Es decir, el curso escolar y el tipo de problema no afectan el uso de estrategias numéricas en los problemas de proporciones. El análisis de varianza no revela alguna interacción significativa.

### Análisis cualitativo

En este apartado se presenta el análisis cualitativo de los protocolos verbales en los problemas numéricos e intuitivos de proporciones de todos los alumnos participantes. El análisis de los protocolos se realizó con las respuestas empleadas por la muestra de participantes en base a sus argumentaciones manifestadas con relación a cada uno de los problemas de la investigación.

En los problemas intuitivos se encuentran 3 niveles de razonamiento intuitivo respecto a las proporciones. El nivel 1 se manifiesta a través de las ideas que son indicadoras de una actividad cotidiana o la elaboración de un producto como resultado de una mezcla o combinación de las sustancias materiales. El nivel 2 se expresa mediante la descripción de las características o cualidades físicas que corresponden a uno de los elementos de manera independiente. El nivel 3 consiste en la formulación de una interacción entre los elementos en base a una correspondencia de características funcionales que tienen un efecto reciproco. La relación entre los niveles es de carácter progresivo siendo más simple el nivel 1 y más complejo el nivel 3.

Los alumnos de quinto de Primaria mostraron los 3 niveles en los siguientes términos. En el nivel 1 se relatan los siguientes argumentos: "mi mamá hace el café", "yo me preparo un café" (problema azúcar-café); "hago agua de kulei (naranjada)", "mi mamá hace agua de kulei" (problema azúcar-kulei); "hacer burbujas de jabón con el agua", "lavar trastes", "lavar ropa", "hacer como un shampoo" (problema jabón-agua); "hacer pan", "hacer pastel", "como las tortillas", "hacer gorditas de comida" (problema harina-agua). En el nivel 2 se tienen los siguientes planteamientos: "el azúcar endulza", "el café da el color", "si le pongo más azúcar quedaría dulce… si le pongo más café sería negro" (problema azúcar-café); "el kulei ya tiene azúcar", "más azúcar es más dulce", "el kulei pinta" (problema azúcar-kulei); "el agua es líquido", "el jabón se expande" (problema jabón-agua); "la harina es blanca", "el agua se disuelve" (problema harina-agua). En el nivel 3 ocurrieron las siguientes ideas: "calculando la cantidad de agua, que pinte el café y endulce el azúcar", "el agua se hace clara con el café", "ni dulce ni agrio" (problema azúcar-café); "para que sepa a naranja y no sepa dulce", "calcular las cantidades y combinarlas", "según el porcentaje de cantidades" (problema azúcar-kulei); "agua poca para que el jabón se disuelva", "sino tiene agua suficiente quedaría muy espeso", "que el jabón haga espuma", "que el agua y jabón hagan espuma" (problema jabón-agua); "que la masa no se haga espesa con el agua", "la harina se disuelve pronto en el agua", "con el agua y la harina se forma una masa", "el agua hace harina con la masa, si le pones más harina se hace engrudo o bolas" (problema harina-agua).

Los alumnos de segundo de Secundaria manifestaron los 3 niveles de la siguiente manera. En el nivel 1 se tuvieron los siguientes pensamientos: "preparase un café" (problema azúcar-café); "hacer agua de kulei" (problema azúcar-kulei); "lavar trastes" (problema jabón-agua); no hay respuestas en este nivel en el problema harina-agua. En el nivel 2 se tienen las siguientes ideas: "el café es más fuerte… se concentra más el sabor", "el café es amargo" (problema azúcar-café); "el kulei da sabor y color… y el azúcar endulza", "no tanto colorante", "es más dulce con el azúcar" (problema azúcar-kulei); "el jabón sólo se puede tallar" (problema jabón-agua); "la harina es blanca" (problema harina-agua). En el nivel 3 se encuentran las siguientes explicaciones: "la combinación es dulce o amarga" (problema azúcar-café); "la proporción que no sea tan dulce y tenga sabor a naranja" (problema azúcar-kulei); "el jabón se disuelve en el agua hasta hacer espuma" (problema jabón-agua); "la harina no cabe en el agua", "el agua con harina hace una masa… puede quedar como engrudo y espesa", "poquita harina para que se disuelva en el agua", "el agua como líquido debe ser mayor cantidad que la harina para que se disuelva", "la harina absorbe el agua hasta hacer una masa" (problema harina-agua).

Como puede apreciarse el razonamiento intuitivo de los alumnos suele ser similar a través del desarrollo, los niños de ambas edades muestran ideas intuitivas semejantes como base para comprender la relación de proporción entre los elementos que pueden combinarse, aunque las diferencias se mostrarían en el aspecto cuantitativo de los 3 niveles de razonamiento proporcional en los problemas intuitivos.

En los problemas numéricos de proporciones también se encuentran 3 niveles de comprensión que son descritos a continuación. El nivel 1 consiste en identificar las cantidades de manera separada y sólo asociándolas como expresiones numéricas. El nivel 2 implica considerar una relación comparativa entre las cantidades en términos de equivalencia o igualdad y de diferencia ya sea como mayor o menor entre ambas cantidades. El nivel 3 significa que existe una idea de proporción entre las cantidades en una dimensión directa, a escala o invertida. De la misma manera que en los problemas intuitivos, en este tipo de problemas se observa una secuencia de dificultad menor a una mayor desde el nivel 1 hasta el nivel 3.

Los alumnos de quinto de Primaria mostraron los 3 niveles mencionados según las siguientes ideas principales. En el nivel 1 se afirman las siguientes ideas: "uno y uno" (problema 1:1); "dos con dos" (problema 2:2); "viendo los números 2 y 1" (problema 2:1); "poner 1 y 3" (problema 1:3). En el nivel 2 se tienen los siguientes argumentos: "un número es igual a otro", "es lo mismo", "coinciden los números" (problema 1:1); "dos de uno y dos de otro", "que sean iguales", "coinciden los números", "no se mezclan de más" (problema 2:2); "más una cosa que otra", "son diferentes" (problema 2:1); "una más grande que otra", "más grande que otra cosa" (problema 1:3). En el nivel 3 ocurren los siguientes planteamientos: "una proporción de uno es igual a uno", "la misma cantidad y da lo mismo" (problema 1:1); "dos y dos son igual en proporción y si los sumas serían 4", "dos veces se repiten dos cosas", "dos de cada cosa", "dos en proporción a dos" (problema 2:2); "representar dos cantidades diferentes", "viendo los números como proporciones", "es una formula" (problema 2:1); "se representan los números en cantidades", "combinan los elementos según los números" (problema 1:3).

Los alumnos de segundo de Secundaria encuentran los 3 niveles descritos para los problemas numéricos de proporción en los siguientes términos. En el nivel 1 se tienen las siguientes argumentaciones: "uno de uno", "una con una" (problema 1:1); "dos con dos" "dos de cada cosa" (problema 2:2); "son diferentes", "dos y uno" (problema 2:1); "viendo los números indicados" (problema 1:3). En el nivel 2 se manifestaron los siguientes planteamientos: "uno equivale a uno", "son similares", "son iguales", "uno es igual a otro", "una cantidad es igual a otra" (problema 1:1); "son iguales", "compara dos con dos", "una cantidad es igual a otra" (problema 2:2); "un número es más grande", "una cosa es más que otra", "poco de una cosa y más de otra cosa" (problema 2:1); "una es menor que otra", "una cosa es mayor que otra cosa (problema 1:3). En el nivel 3 se encuentran las siguientes respuestas representativas: "es proporcional", "se hace una mezcla con las mismas cantidades", "una porción es igual a otra" (problema 1:1); "cantidad igual entre dos cosas distintas", (problema 2:2); "es una mezcla mayor y dispareja", "relación de correspondencia entre dos cosas" (problema 2:1); "pensar en la relación entre los números o las cantidades", "procedimiento de correspondencia con cucharas o medidas", "es un tipo escala según los elementos que se combinan, son las proporciones de los elementos… de algún producto se haría una porción y del otro sería lo triple", "puedes poner en un orden o en otro como… 3 de azúcar y una de chocolate o 3 de chocolate y una de azúcar" (problema 1:3).

Igualmente se aprecia que ambos grupos de alumnos muestran semejante razonamiento proporcional en los tres niveles cuando se presentan problemas numéricos. Es decir, la comprensión de las relaciones numéricas se construye de manera progresiva considerando sus niveles de conocimiento al margen de la edad de los alumnos.

En general se puede afirmar que el razonamiento intuitivo sobre las proporciones es más competente para ambos grupos de alumnos, mientras que el razonamiento numérico suele ser menos común entre ellos. Entonces se confirma el impacto del conocimiento intuitivo en el aprendizaje informal de las proporciones a diferencia del conocimiento formal o escolar.

## Discusión

En cuanto a los datos significativos se tiene que los resultados muestran relevancia en el rendimiento y las estrategias de solución de los problemas de proporciones.

En el caso del rendimiento se encuentra que existen diferencias en relación con el tipo de problema de proporción. Los alumnos de ambos grados escolares muestran mejor rendimiento en los problemas intuitivos en comparación con los problemas verbales. Esto significa que los alumnos comprenden mejor la relación de proporción entre los elementos del problema cuando se presentan conforme al contexto cotidiano. Los problemas informales son mejor comprendidos que los problemas formales en torno a una relación entre las cantidades de proporción cuando se mezclan varias sustancias para formar una combinación o un conjunto formado por varios elementos. Entonces el razonamiento proporcional es de tipo intuitivo y se construye por medio de la relación con el contexto cotidiano. En cambio, el razonamiento numérico muestra dificultades para establecer las relaciones de proporción entre las cantidades, resulta más difícil comprender los símbolos que los eventos cotidianos.

Las estrategias lógicas son más comunes en los problemas intuitivos que en los problemas numéricos. Esto indica el proceso cognitivo que siguen los alumnos en el momento de establecer una relación o conexión entre el conocimiento intuitivo y el conocimiento lógico. El uso de estrategias lógicas implica que se debe tener una relación con los problemas numéricos, pero esto sólo se espera en una concepción teórica que asuma que la construcción del conocimiento ocurre únicamente de una manera simbólica o lógica. Esto mismo se plantearía con los problemas intuitivos que tendrían un solo vínculo con el conocimiento intuitivo. La realidad es que nos encontramos con una conexión entre el conocimiento intuitivo y los procedimientos formales. La combinación de los procesos espontáneos como parte del cambio conceptual facilita la expresión de procedimientos formales que responden a los contenidos de la enseñanza.

Las estrategias intuitivas aparecen en mayor medida en relación con los problemas de proporción de acuerdo con el grado escolar de los alumnos. Los alumnos de quinto grado de Educación Primaria manifiestan principalmente las estrategias intuitivas cuando resuelven problemas numéricos que cuando solucionan problemas intuitivos. En este sentido se plantea que los alumnos parten del conocimiento formal que se conecta con procedimientos informales. Esto indica que el aprendizaje formal de las proporciones se apoya en los procedimientos construidos de manera intuitiva. Como se podría esperar de acuerdo con la escuela tradicional se considera que los procesos cognitivos formales generan procedimientos formales, mientras que los procesos cognitivos informales se expresan con procedimientos informales cuando se tienen en cuenta. Sin embargo, nuestros datos confirman que lo que se ha mencionado anteriormente sólo ocurre de una manera combinada o interactiva. En otras palabras, la cognición intuitiva no está separada de la cognición lógica ni viceversa. Los alumnos de segundo de secundaria manifiestan datos opuestos a los niños de primaria. Es decir, estos alumnos emplean las estrategias intuitivas con relación a los problemas intuitivos en mayor medida que con respecto a los problemas numéricos. En este caso se encuentra la correspondencia de la relación del conocimiento intuitivo con los procedimientos intuitivos. Una posible explicación consiste en que los alumnos de secundaria han definido que la escuela es un escenario para la construcción de un razonamiento formal que tiene relación con problemas formales, mientras que el conocimiento intuitivo se considera que se manifiesta en un contexto informal, fuera de la escuela. En esta edad se plantea una separación de los tipos de conocimiento por la cuestión de su sentido aplicativo y la referencia contextual. Sin embargo, la cuestión de investigación reside en revisar la conexión entre ambos tipos de conocimiento.

Cabe mencionar que las estrategias numéricas no han sido relevantes en la solución de los problemas de proporciones debido a que los alumnos recurren a procedimientos de mayor razonamiento o experiencia que a la acción de plantear números o cantidades en ecuaciones u operaciones matemáticas.

La consistencia de los resultados con otros estudios se puede plantear en los siguientes términos. El razonamiento proporcional tiene una base intuitiva desde el momento que los alumnos recurren a elementos cotidianos, resuelven los problemas del contexto informal y son capaces de convertir las relaciones de cantidades en un plano informal tal como se ha comprobado por Resnick y Singer (1993); y, Singer, Kohn y Resnick (1997).

Además se puede señalar que los alumnos construyen el conocimiento proporcional de una manera activa a partir del planteamiento de problemas que en el desarrollo se enfrentan los alumnos. Es decir, la representación de las relaciones de proporción se construye de una manera activa (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983).

Los alumnos de quinto grado de primaria con una edad promedio de 9 a 10 años manifiestan directamente un razonamiento intuitivo que se origina desde una edad temprana en los niños de 6 a 7 años (Van den Brink & Streefland, 1979). Este planteamiento coincide con el estudio de Carpenter et al. 1993 quienes encontraron que al final del nivel preescolar, los niños en aulas tipo Instrucción Guiada Cognitivamente pueden solucionar una variedad de problemas a través del modelado de la acción o relaciones descritas en los problemas. Los resultados apoyan la idea de que los niños pequeños pueden inventar estrategias para resolver una variedad de problemas si se les otorga la oportunidad para hacerlo. En la mayor parte de todos los casos, los niños usaron estrategias modelado directo que confirmaban el modelo de desarrollo del pensamiento matemático de los niños según tales autores.

Los resultados muestran que existe una interacción entre el conocimiento formal y el conocimiento intuitivo desde el momento que se resuelven los problemas. Es decir, las estrategias manifiestan esta interacción cuando acontecen de manera formal o intuitiva. Estos datos son consistentes con los encontrados por Resnick (1986) con alumnos en situaciones de aprendizaje informal. En este sentido se coincide con el planteamiento de Evans (1999) en cuanto que se establecen puentes o conexiones entre las actividades de aprendizaje dentro y fuera del contexto escolar. Estas articulaciones se construyen mediante las prácticas educativas involucradas en las relaciones de transferencia del aprendizaje y los discursos relacionados como sistema de signos dentro de una situación educativa concreta. De acuerdo con este autor es importante analizar las semejanzas y diferencias entre los discursos de la escuela y la vida cotidiana como indicador de la relación entre las matemáticas escolares y las matemáticas de la calle o cotidianas. En este aspecto resulta crucial la relación de transferencia de conocimientos entre ambos contextos de aprendizaje.

En nuestros datos se encuentra que tenemos una relación del razonamiento con la clase de estrategias que se emplean. Tampoco se coincide con el planteamiento de Nesher y Sukenik (1991) en cuanto que el razonamiento proporcional produzca un rendimiento superior en los problemas formales que en los problemas intuitivos. Algunos autores consideran que el razonamiento de proporción implica la lógica de la multiplicación (Singh, 2000) que no se encuentra cuando se tiene una concepción intuitiva.

Finalmente se exponen las implicaciones educativas que se originan según los resultados de la presente investigación. En principio se puede plantear que el modelo educativo tradicional donde el profesor transmite conocimientos y el alumno memoriza la información es un obstáculo hacia la construcción del conocimiento activo de los escolares. Por el contrario asumiendo una aproximación constructivista es posible generar oportunidades de aprendizaje que faciliten la manifestación de los conocimientos que los alumnos han adquirido fuera del entorno escolar. Estos conocimientos previos pueden servir de base para elaborar los programas educativos sobre distintos dominios de conocimiento. En el caso del aprendizaje de las proporciones los alumnos suelen comprender estas relaciones de manera preferente a través de su conocimiento intuitivo. Es decir, los alumnos encuentran más fácil resolver tareas que son presentadas en un contexto informal y cotidiano que cuando deben solucionar las mismas relaciones bajo un modelo numérico. Entonces se considera que es importante que la educación incluya contenidos de aprendizaje que impliquen transferir el conocimiento informal hacia el conocimiento formal y no tanto el conocimiento formal hacia el conocimiento informal. Las experiencias de aprendizaje fuera de la escuela son la base para elaborar los contenidos del aprendizaje formal. Las secuencias de aprendizaje tendrían como referencia los 3 niveles de comprensión de las proporciones en un sentido progresivo. Por tanto es conveniente destacar el aprendizaje de las proporciones desde una edad temprana y no tanto hasta que los alumnos hayan adquirido una maduración, sino más bien atender al desarrollo de la mente intuitiva de los alumnos. En este aspecto coincidimos con la perspectiva del cambio conceptual (Fujimura, 2001) cuando se reconoce la importancia de las concepciones intuitivas en el aprendizaje formal.

## Referencias


Behr, M., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 91-126). New York: Academic Press.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. (1983). Models of problem solving: A study of kindergarten children's problem-solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 427-440.

Chi, M. L. H., & Glaser, R. (1982). *Final report: knowledge and skill difference in novice and experts.* (Contract No. N00014-78-C-0375). Washington, D. C: Office of Naval Research.

Chi, M. L. H., Feltovich, P. J., & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5* (2), 121-152.

Evans, J. (1999). Building bridges: reflections on the problem of transfer of learning in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 23-44.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Fujimura, N. (2001). Facilitating Children's Proportional Reasoning: A Model of Reasoning Processes and Effects of Intervention on Strategy Change. *Journal of Educational Psychology, 93* (3), 589-603.

Harel, G., & Behr, M. (1989). Structure and hierarchy of missing value proportion problems and their representations. *The Journal of Mathematical Behavior, 8*, 77-119.

Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1992). The blocks task; comparative analysis of the task with other proportion task, and qualitative reasoning skills of 7th grade children in solving the task. *Cognition and Instruction, 9* (1), 45-96.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number-concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (1989). *Ratio and proportion: Preinstructional cognitions*. Unpublished doctoral dissertation. University of Wisconsin-Madison.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 16-32.

Nesher, P., & Sukenik, M. (1991). The effect of formal representations on the learning of fraction concepts. *Learning and Instruction, 1*, 161-175.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II, Problem sctructure at successive stages: problem solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 2*, 331-363.

Resnick, L. B. (1986). The development of mathematical intuition. In M. Perlmutter (Ed.), *Perspectives on intellectual development: The Minnesota Symposia on Child Psychology* (pp. 159-194). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Resnick, L. B., & Singer, J. A. (1993). Protoquantitative origins of ratio reasoning. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 107-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Singer, J. A., Kohn, S. A., & Resnick, L. B. (1997). Knowing about proportions in different contexts. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 115-132). Hove: Psychology Press.

Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics, 43*(3), 271-292.

Van den Brink, J., & Streefland, L. (1979). Young children (6-8), ratio and proportion. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 403-420.

Van Dooren, W., de Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction, 23*(1), 57-86.


*Received 06/12/2006*
*Accepted 29/07/2007*

**Juan José Díaz Díaz de León**. School and Development Psychology Dr. by University Complutense of Madrid. Professor on Psychology Academic Unit at University Autonoma of Zacatecas, México. Leader of Academic Team: Cognitive Processes of Learning. Research line: learning on mathematics, sciences and reading.

**Marco Antonio Soto Mayorga**. Bachelor on Psychology by University Autonoma of Zacatecas Professor on Psychology Academic Unit at University Autonoma of Zacatecas, México. Member of Academic Team: Cognitive Processes of Learning. Collaborative research: learning on mathematics, sciences and reading.

**Adriana Martínez Sánchez.** Bachelor on Psychology by University Autonoma of Zacatecas Support research: learning on mathematics, sciences and reading.